EEIGM
$1^{ère}$ Année

Discipline Mécanique

Résistance des Matériaux

TD 2 :
Caractéristiques géométriques des sections droites

Zoubir AYADI

Exercice 1 : Aire, centre et moments statiques d'une section droite
On considère la section droite suivante :

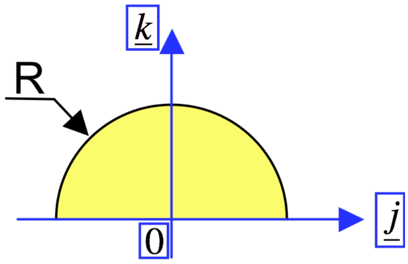
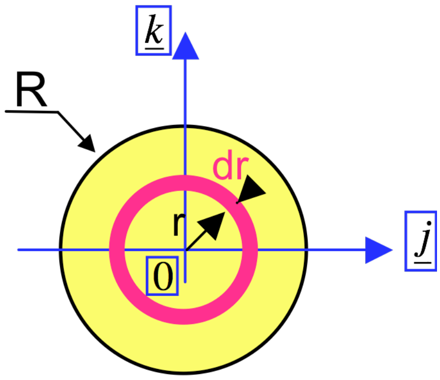


Figure 1 : Section droite.

Question 1 : Calculer l'aire de la section,
Question 2 : Déterminer les moments statiques A_{0y} et A_{0z}
Question 3 : En déduire les coordonnées du centre de la section

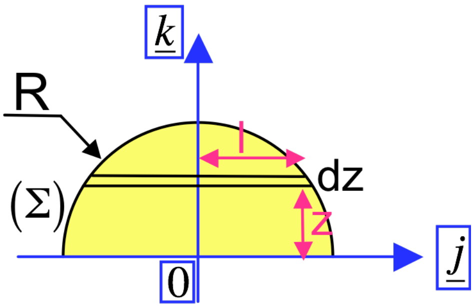
Corrigé
1. Calcul de l'aire de la section droite
Une méthode possible consiste à calculer l'aire du disque de rayon R puis prendre la moitié.



$$S = \iint_{\Sigma} ds = \int_0^R 2\pi\, r dr = 2\pi \int_0^R rdr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2$$

On en déduit donc l'aire de la section droite étudiée : $\frac{\pi R^2}{2}$, le résultat s'exprime en $\mathbf{m^2}$ dans le système **SI**.

2. Calcul des moments statiques



On applique la définition :

$$A_{Oy} = \int_{\Sigma} z ds = \int_{\Sigma} z(2l.dz) = \int_{0}^{R} 2z\sqrt{R^2 - z^2}\, dz = \left[-\frac{2}{3}\left(R^2 - z^2\right)^{3/2}\right]_0^R$$

Le moment statique de la section droite par rapport à l'axe (Oy) est :

$A_{Oy} = \frac{2}{3}R^3$, s'exprime en **m**^{3} dans le système **SI**.

L'axe (Oz) est un axe de symétrie pour la section droite. On sait que le moment statique par rapport à un axe de symétrie est nul. On a donc :

$$A_{Oz} = 0$$

3. On en déduit les coordonnées du centre de la section droite $G = (y_G, z_G)$ données par :

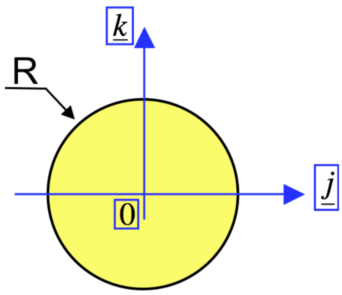
$$y_G = \frac{A_{Oz}}{S} \quad ; \quad z_G = \frac{A_{Oy}}{S}$$

d'où :

$y_G = 0$; $z_G = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$, en **m** dans le système **SI**.

Exercice 2 : Moments quadratiques d'un disque de rayon R

Soit la section droite suivante :



Question 1 : Déterminer le moment quadratique polaire I_{Gx}.

Question 2 : En déduire les moments quadratiques I_{Gy} et I_{Gz}.

Corrigé

1. Moment quadratique polaire

On applique la définition :

$$I_{Gx} = \int_{\Sigma} r^2 ds = \int_0^R r^2 (2\pi r dr) \qquad \text{avec } r^2 = y^2 + z^2$$

soit :

$$\boxed{I_{Gx} = \frac{\pi R^4}{2}} \text{, s'exprime en } \mathbf{m^4} \text{ dans le système } \mathbf{SI}.$$

2. Moment quadratiques

$$\boxed{I_{Gx} = \int_{(S)} r^2.ds = \int_{(S)} (y^2 + z^2).ds = \underbrace{\int_{(S)} z^2.ds}_{I_{Gy}} + \underbrace{\int_{(S)} y^2.ds}_{I_{Gz}}}$$

Pour des raisons de symétrie, on a $I_{Gy} = I_{Gz}$

on en déduit donc les moments quadratiques par rapport aux axes (Gy) et (Gz) :

$$\boxed{I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{I_{Gx}}{2} = \frac{\pi R^4}{4}} \text{, s'exprime en } \mathbf{m^4} \text{ dans le système } \mathbf{SI}.$$

Exercice 3 : Etude d'une section droite en forme de cornière à ailes inégales
On considère la cornière représentée sur la figure3 dont les dimensions sont les suivantes : $h=80\ 10^{-3}$m , $b+e=60\ 10^{-3}$m , $e=8\ 10^{-3}$m

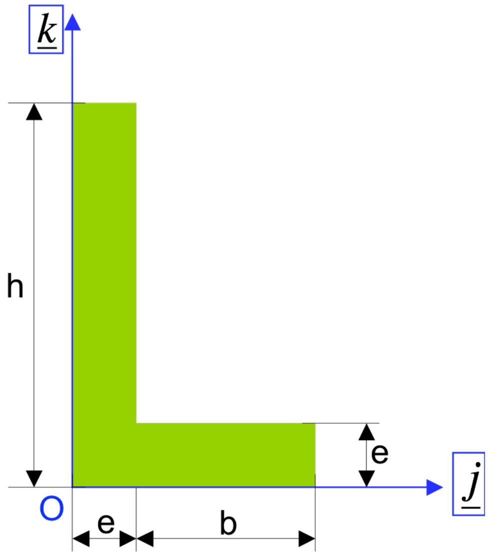
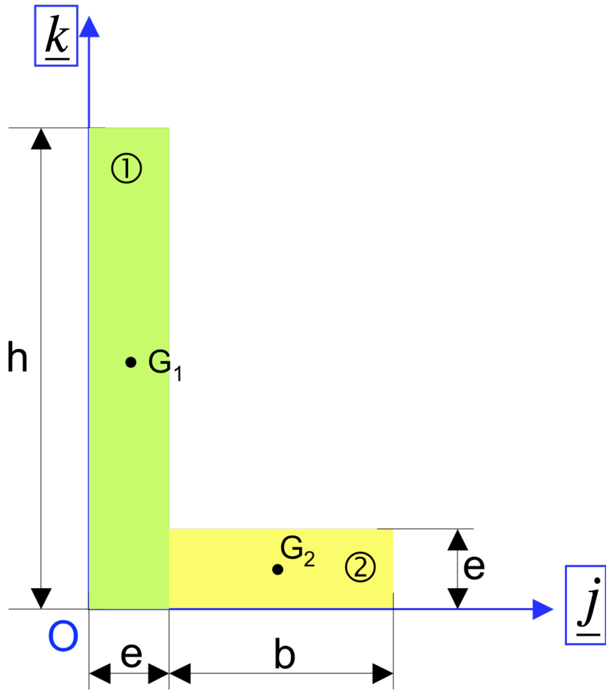


Figure 3 : Cornière 80x60x8

Question 1 : Déterminer la position du centre de la section droite.
Question 2 : Déterminer les moments quadratiques I_{Gy}, I_{Gz} et le moment produit I_{Gyz} .
Question 3 : Déterminer la position du repère principal.
Question 4 : Déterminer les moments quadratiques principaux I_{GY}, I_{GZ} .

Corrigé
On peut décomposer la section droite en deux sous sections rectangulaires ① et ②.



1. Position du centre de la section droite

On applique la définition : $\underline{OG} = \frac{1}{S}\int_{(S)} \underline{OM}.ds$

$$(S_1 + S_2)\underline{OG} = S_1\underline{OG}_1 + S_2\underline{OG}_2$$

d'où les expressions littérales des coordonnées de G :

$$y_G = \frac{1}{e(b+h)}\left(eh\frac{e}{2} + eb\left(e + \frac{b}{2}\right)\right)$$

$$z_G = \frac{1}{e(b+h)}\left(eh\frac{h}{2} + eb\frac{e}{2}\right)$$

L'application numérique conduit à:

$$y_G = \frac{1}{8(52+80)}\left(8x80\frac{8}{2} + 8x52\left(8 + \frac{52}{2}\right)\right)10^{-3}, \text{ en } \mathbf{m}$$

$$y_G = 15.8\ 10^{-3}\,m$$

$$z_G = \frac{1}{8(52+80)}\left(8x80\frac{8}{2} + 8x52\frac{8}{2}\right)10^{-3}, \text{ en } \mathbf{m}$$

$$z_G = 25.8\ 10^{-3}\,m$$

2. Moments quadratiques

Moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe (Gy)

On a
$$I_{Gy} = I^1_{Gy} + I^2_{Gy}$$

en appliquant le théorème de Huyghens, on a :

$$I^1_{Gy} = I^1_{G_1y} + S_1\left(z_G - z_{G_1}\right)^2 = \frac{eh^3}{12} + eh\left(z_G - \frac{h}{2}\right)^2, \text{ en } \mathbf{m^4}$$

$$I^2_{Gy} = I^2_{G_2y} + S_2\left(z_G - z_{G_2}\right)^2 = \frac{be^3}{12} + eb\left(z_G - \frac{e}{2}\right)^2, \text{ en } \mathbf{m^4}$$

Application numérique :

$$I_{Gy}^{1} = 4.70\ 10^{-7} m^4$$

$$I_{Gy}^{2} = 2.00\ 10^{-7} m^4$$

$$I_{Gy} = 6.70\ 10^{-7} m^4$$

Moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe (Gz)

$$I_{Gz} = I_{Gz}^{1} + I_{Gz}^{2}$$

En appliquant le théorème de Huyghens, on a :

$$I_{Gz}^{1} = I_{G_1 z}^{1} + S_1\left(y_G - y_{G_1}\right)^2 = \frac{he^3}{12} + eh\left(y_G - \frac{e}{2}\right)^2 \text{, en } \mathbf{m^4}$$

$$I_{Gz}^{2} = I_{G_2 z}^{2} + S_2\left(y_G - y_{G_2}\right)^2 = \frac{eb^3}{12} + eb\left(y_G - \left(e + \frac{b}{2}\right)\right)^2 \text{, en } \mathbf{m^4}$$

Application numérique :

$$I_{Gz}^{1} = 0.93\ 10^{-7} m^4$$

$$I_{Gz}^{2} = 2.31\ 10^{-7} m^4$$

$$I_{Gz} = 3.24\ 10^{-7} m^4$$

Moment produit de la section droite (Gyz)

$$I_{Gyz} = I_{Gyz}^{1} + I_{Gyz}^{2}$$

En appliquant le théorème de Huyghens, et en remarquant que les moments produits $I_{G_1 yz}^{1}$ et $I_{G_1 yz}^{2}$ sont nuls pour des raisons de symétrie, on a :

$$I_{Gyz}^{1} = I_{G_1 yz}^{1} + S_1\left(y_G - y_{G_1}\right)\left(z_G - z_{G_1}\right) = eh\left(y_G - \frac{e}{2}\right)\left(z_G - \frac{h}{2}\right) \text{, en } \mathbf{m^4}$$

$$I_{Gyz}^{2} = I_{G_2 yz}^{2} + S_2\left(y_G - y_{G_2}\right)\left(z_G - z_{G_2}\right) = eb\left(y_G - \left(e + \frac{b}{2}\right)\right)\left(z_G - \frac{e}{2}\right) \text{, en } \mathbf{m^4}$$

Application numérique :

$$I_{Gyz}^{1} = -1.07\ 10^{-7} m^4$$
$$I_{Gyz}^{2} = -1.65\ 10^{-7} m^4$$
$$I_{Gyz} = -2.72\ 10^{-7} m^4$$

3. Position du repère principal

$$tg(2\theta) = -\frac{2I_{Gyz}}{I_{Gy} - I_{Gz}}$$

application numérique :

$$tg(2\theta) = 1.572$$

soit

$$\theta = 28.8°$$

4. Moments quadratiques principaux

Moment quadratique principal par rapport à l'axe GY

$$I_{GY} = \frac{1}{2}\left(I_{Gy} + I_{Gz}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{Gy} - I_{Gz}\right)^2 + 4I_{Gyz}^2} \text{ , en } \mathbf{m^4}$$

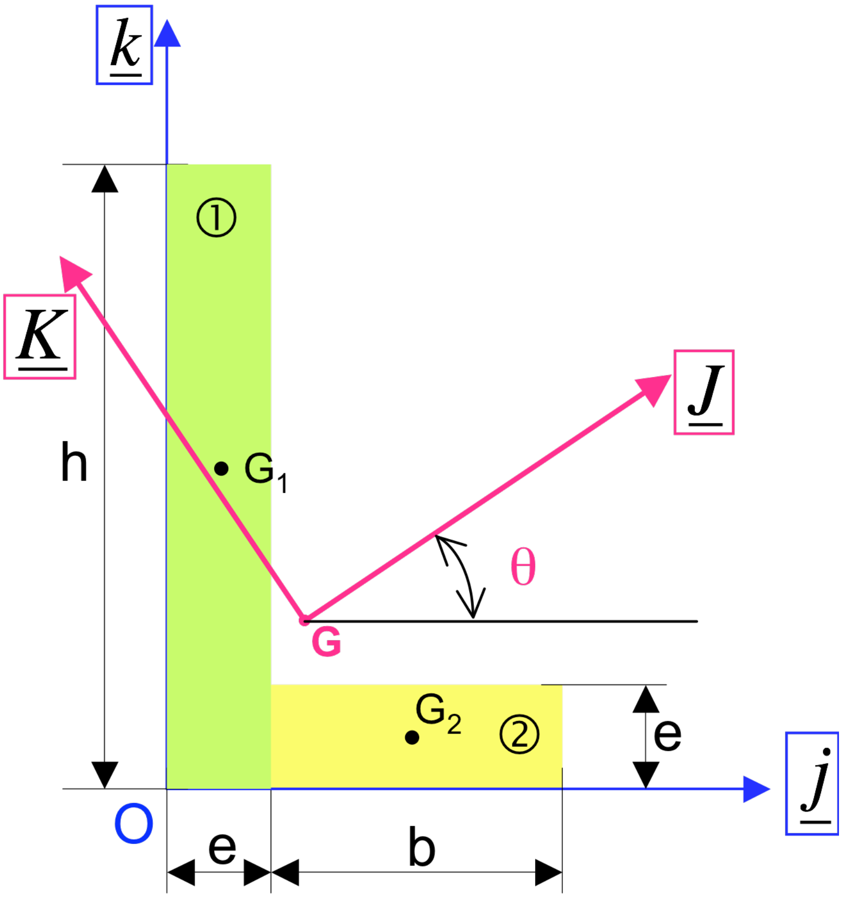
Moment quadratique principal par rapport à l'axe GZ

$$I_{GZ} = \frac{1}{2}\left(I_{Gy} + I_{Gz}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{Gy} - I_{Gz}\right)^2 + 4I_{Gyz}^2} \text{ , en } \mathbf{m^4}$$

application numérique :

$$I_{GY} = 8.20\ 10^{-7} m^4$$

$$I_{GZ} = 1.75\ 10^{-7} m^4$$


k
①
K
J
h
G1
θ
G
G2
②
e
j
O
e
b